区分的線形な制約式をもつ大規模な2次計画法の解法について

山 本 紀 徳

1 序

1-1 区分的線形変動方程式系

計量経済システム・モデルにおいて，システムへの外乱がシステムに与える影響を具体的に定量，分析を行なうことは大変重要なことである。というのは，あるシステムに対して何等かの外乱が起きたときに，その外乱によってシステム内の様々な要素は影響を受けることになるのであるが，もしもこの影響の度合いが分析しやすい形で定量化されている場合には，予想しうる外乱の生起に対して，システム内の諸要素の受ける影響を考慮しつつ，適切な制御を行なうことが可能となるからである。

筆者はすでに先の共同研究において，わが国の経済計画の基となったひとつの計量モデル[1)]について，外乱（外生変数）の変動に対して，システム内の諸要素（主要な内生変数）が受ける影響を計測する方法を具体化した。[2)]そこでは，いくつかの主要な政策（外生）変数（政府の財貨サービス経常購入，政府固定資本形成，個人税減税累積額，法人一般税率，間接税率および

1) 〔15〕参照。このモデルを取り上げたのは次の理由による。(1)このモデルは72本の方程式からなるノンリニアーな系で，116個の変数（72個の内生変数と44個の外生変数）を含む中型モデルであり，データ処理および分析にとって適切な規模である。(2)このモデルには，さまざまなノンリニアーな方程式（計36個）が含まれている。(3)44個の外生変数の中には，例えば，個人税減税額，間接税負担率や公害防除投資額などが含まれており，これらを特に変動させる変数として取り扱うことにより，より現実的な意味をもつシミュレーション分析を指向することができる。

2) 山本，高井〔14〕。

公害防除投資額）の変動にともなう内生変数の変動を，変数にかんする区分的線形な方程式系で記述する試みが行われた。[3] すなわち，主要な政策変数（以下シミュレーション変数という）を各期にわたってランダムに変動させ，それらの変動にともなう，ノンリニアーな型で specificate された内生変数の変動に関して，シミュレーションを通じて線形回帰分析を行ったのである。線形回帰分析を行う際の説明変数の選択には若干の工夫が加えられている。具体的にいうと，説明変数としては，(1)もとのノンリニアーな方程式に含まれているすべての内生変数の変動量(2)ある一つのシミュレーション変数のみが当期に変動したときに，当該内生変数が当期に受ける変動量（すべてのシミュレーション変数について，この変動量を説明変数の対象とする）を選んだのである。

例として，個人消費関数をとりあげる。もとの式は次のようなノンリニアー型である。

$$C=\alpha+\beta\cdot(YD+AU)/PC+\gamma\cdot C_{-1}$$

ここに α, β, γ はいずれも定数であり，また，YD：個人可処分所得，AU：個人在庫品評価調整額，PC：個人消費支出デフレーターをそれぞれ示している。

ある期 t における，6組のシミュレーション変数の，標準的シナリオからの変動 $\varDelta S$, $\varDelta S=(\varDelta s_1, \cdots, \varDelta s_6)$ にともなう C の変動を $\varDelta C(\varDelta S)$ としたとき，$\varDelta C(\varDelta S)$ を次のリニアーな回帰式により表現する。

$$\varDelta C(\varDelta S)=\delta\cdot(\varDelta YD(\varDelta S)+\varDelta AC(\varDelta S))+\varepsilon\cdot\varDelta PC(\varDelta S)+\zeta\cdot\varDelta C_{-1}$$
$$+\eta\cdot\varDelta C(\varDelta s_1)+\cdots+\omega\cdot\varDelta C(\varDelta s_6)$$

ここに，δ, $\cdots$, ω は回帰係数を示し，また，$\varDelta YD(\varDelta S)$ などは，t 期における YD などの変動を表わしている。さらに，$\varDelta C(\varDelta s_i)$ $(i=1, \cdots, 6)$ は t

3) もとの方程式系において，ノンリニアーな式で，例えば $y=f(a, b, c)$ などと表現された変数 y の変動 $\varDelta y$ を $\varDelta y=\alpha\cdot\varDelta a+\beta\cdot\varDelta b+\gamma\cdot\varDelta c+\theta\cdot\varDelta y(s_1)+\cdots+\omega\cdot\varDelta y(s_6)$（ここに，$\alpha$, $\cdots$, ω は定数）などのリニアーな式で表現するが，ここで $\varDelta y(s_1)$ などは変数に関して区分的線形な関数となっている。

期において i 番目のシミュレーション変数のみが Δs_i だけ変動したときに，C が標準的シナリオのもとでの値からどれだけ変動するかを示している。この $\Delta C(\Delta s_i)$ の値は次のように計算される。

i 番目のシミュレーション変数について，その変数がもつ変動幅の 1/10刻み毎の変動値に対して，標準的シナリオのもとでの内生変数の変動値をまず計算しておく。いま Δs_i が，

$$\Delta s_i(k) \leq \Delta s_i \leq \Delta s_i(k+1) \quad (k=0, \cdots, 9)$$

であったとする。たゞし，$\Delta s_i(k)$ および $\Delta s_i(k+1)$ は，i 番目のシミュレーション変数の変動幅を $s_i(L)$ としたときの，$k \cdot s_i(L) \cdot 1/10$ と $(k+1) \cdot s_i(L) \cdot 1/10$ とをそれぞれ示している。この変動 $\Delta s_i(k)$ および $\Delta s_i(k+1)$ に対応する C の変動を，それぞれ $\Delta C(\Delta s_i(k))$ および $\Delta C(\Delta s_i(k+1))$ とする。このとき $\Delta C(\Delta s_i)$ は，この $\Delta C(\Delta s_i(k))$ および $\Delta C(\Delta s_i(k+1))$ との線形補間によって，

$$\Delta C(\Delta s_i) = \Delta C(\Delta s_i(k)) + (\Delta C(\Delta s_i(k+1) - \Delta C(\Delta s_i(k)) \cdot (\Delta s_i(k+1) \\ - \Delta s_i)/(\Delta s_i(k+1) - \Delta s_i(k))$$

として求めることとした。

それ故，このような線形補間を施すことは，

$$\Delta C(\Delta S) = \delta \cdot (\Delta YD(\Delta S) + \Delta AU(\Delta S)) + \varepsilon \cdot \Delta PC(\Delta S) + \zeta \cdot C_{-1} \\ + \eta \cdot \Delta C(\Delta s_1) + \cdots + \omega \cdot \Delta C(\Delta s_6)$$

において，例えば，$\Delta C(\Delta s_1)$ は変数 Δs_1 に関して区分的な線形関数となっていることを意味しているのである。

ところで，もとの方程式系で，被説明変数が内生変数のリニアーな関数であるときには，その被説明変数の，標準的シナリオのもとでの値からの変動を，説明内生変数の変動の一次結合で exact に表現できることに注意しよう。

例を民間在庫投資関数 JP にとってみよう。もとの式は，定数項を無視して，

$$JP = \alpha \cdot V + \beta \cdot KJP_{-1} + \gamma \cdot (i_{-1} - i_{-2})$$

ここに V：国民総生産，KJP：民間在庫品残高，i：全国銀行貸付平均金

利を示している。従って,

$$\Delta JP=\alpha\cdot\Delta V+\beta\cdot\Delta KJP_{-1}+\gamma\cdot(\Delta i_{-1}-\Delta i_{-2})$$

が exact に成立する。ここに $\Delta(*)$ は,内生変数が標準的シナリオのもとでの値から,どれだけ変動しているかを示す変動量である。

上記の,いわば区分的線形変動方程式系と名付けうるシステムが,政策変数の変動にともなう内生変数の変動をかなり正確に記述するものであることを,われわれは追加的な実験によって検証している。[4)]

1-2 区分的線形変動方程式系の下での最適政策問題

前の小節では,大規模,かつ,ノンリニアーな方程式系において,いくつかの主要な政策変数の変動が内生変数に与える影響の度合いを計測するものとして,区分的線形方程式系が具体的に構成されるのを見てきた。この区分的線形変動方程式系は,政策決定主体である中央政府が,自らコントロールしうる政策変数を同時にいくつか変化させたときに,システム内のさまざまな諸要素,とりわけ中央政府にとっての目標とすべき内生変数がオーバー・タイムにどのように変化するかを知るに足るものである。しかも,この区分的線形変動方程式系は,区分的線形な関数および線形関数との一次結合で示される方程式群から構成されており,後に見るように,もとのノンリニアーな方程式系に比較して,それに対する操作上の取扱いはかなり容易なシステムとなっている。これらの事実は,中央政府の評価基準として,単一のスカラー化された評価関数(目標関数)が与えられた場合に,上述の区分的線形変動方程式系を制約条件として考えたとき,オーバー・タイムに最適な政策(optimal policies)を決定するための問題の枠組が明確に与えられることを意味すると同時に,その問題における最適な政策(最適な解)をコンピュータを用いて実用的に求めうるということをも意味しているのである。

それ故,中央政府の目標関数として,計量モデルの最適制御の際によく用いられる2次関数を設定した場合には,最適な政策を決定する問題を,区分

4) 山本,高井〔14〕。

的線形変動方程式を制約式としてもつ2次計画法(quadratic programming)の問題としてとらえることができる。しかし，いわゆる2次計画法では，そこに示される制約式はリニアーな関数である。[5] それ故，われわれの計画問題を解こうとする場合には，通常の2次計画法の手法とは異なるアプローチを行う必要がある。

以下セクション2―1で，われわれの計画問題を明確に設定する。セクション2―2では上述の問題に対する近似的解法である，セパラブル・プログラミング（separable programming）についてふれる。さらにセクション2―3において，われわれの計画問題がもつ構造的特徴を利用することによって問題を縮小化し，上述の近似的解法がコンピュータによって実用的に実行されうることを見る。しかしながら，これらの解法はあくまでも近似的な解法であり，得られた解が真の最適解（一般には局所的（local）な解）とどれほどの差異をもつのかは近似の程度によるものであり，計算に先立ってその近似度を予想しうるものではない。

そこでセクション3では，われわれの計画問題を exact な形で解くための方法が論じられる。そこでは，まず，われわれの計画問題に対して，クーン・タッカーの定理を適用することによって得られる一連の必要条件をもとに，われわれの計画問題を拡張された線形計画法の問題に還元することが行われる。次いで，この拡張された線形計画法の問題に，線形計画法の上限法（upper bounding method）を利用することによって，制約式の本数を大幅に減少さすことを狙う。そして，この上限法を利用し，かつ，区分的線形な制約式に現われる変数についての一定の制限を考慮しながら，拡張された線形計画法の問題を解くための方法が論じられる。セクション3―2では，簡単な例について上述の方法を適用して解を求めている。

---

5) 2次計画法は，Gass〔1〕，van de Panne〔12〕および古林〔13〕が詳しい。また，これらの手法のコンピュータ・プログラムは，Künzi et al.〔4〕および Land and Powell〔5〕を参照。

2 区分的線形な制約式をもつ大規模な2次計画法の近似的解法

2-1 問題の設定

われわれの計画問題を次のように設定しよう。まず中央政府は主要な政策変数 X_t をもち，この X_t を制御しながら，評価対象となる内生変数＝目標変数（target variables）Y_t が amalgamate された目標関数を最小化するものとしよう。その際，主要な政策変数の変動にともなう内生変数を変動を記述するところの区分的線形変動方程式系はすでに得られているものとしよう。

上に述べた中央政府のもつ目標関数としては，目標変数 Y_t の目標値 Y_t^* からの偏差の，ウェイト付けされた2乗和を考えることとする。このような考えに基づく評価関数は損失関数（loss function）ともいわれ，政策決定問題ではよく利用されるものである。[6] その際に，政策変数のコストを考慮に入れて，損失関数の構成項目中に政策変数をも追加している例も少くない。この場合にも当然のことながら，それぞれの項目についてのウェイト付けを行わなければならないが，政策と目標との比較をすること自体が困難なことであり，このことからこのような損失関数がもつ恣意性がますます大きくなる傾向が指摘されよう。[7] また，以下のセクション3での議論からもわかるように，損失関数の中に政策変数を追加することは，数式上の取扱いにも一定の困難さをひきおこすことになる。これらのことから，本稿では目標関数の構成項目としては，目標変数の目標値からの偏差の二乗をウェイト付けしたものとする。

これまでの議論をもとに，われわれの計画問題を次のように定式化しよう。

（A） Find X_{it}^* $\quad i=1, \cdots, r\,;\, t=1, \cdots, T$

such that

（B） $\sum_t \sum_j w_{jt}(Y_{jt}-Y_{jt}^*)^2 \to \mathrm{Min!!}$

6) Theil〔8〕,〔9〕および Klein〔3〕などを参照。
7) Qayum〔7〕, pp. 228-229.

subject to

(C)　$A_t Y_t + \cdots\cdots + A_{t-s} Y_{t-s} + \Gamma_t = 0 \quad t=1, \cdots, T$

where

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \sum_i h_{i1t} \cdot G_{i1t}(X_{it}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i h_{iNt} \cdot G_{iNt}(X_{it}) \end{pmatrix}$$

(D)　$G_{ijt}(X_{it}) = C_{ijt}(k) + g_{ijt}(X_{it} - X_i(k))$

$$i=1, \cdots, r : t=1, \cdots, r : k=1, \cdots, p$$

$$X_i(k-1) \leqq X_{it} \leqq X_i(k)$$

ここで，添字 i は第 i 番目の主要な政策変数を，j は第 j 番目の評価対象となる内生変数を，t は第 t 期であることを，また s は最高のタイム・ラグであることをそれぞれ示している。また，添字 k は区分的線形関数で表示される関数における分点を表わしている（図 2-1 参照)。

(B) は２次の目標関数を示し，w_{**} はウェイトを，Y_{**} は目標関数の変動量を，$Y_{**}{}^*$ は Y_{**} の目標値をそれぞれ示している。

(C) は区分的線形変動方程式系を表わしている。ここで，A_* はシステム・パラメーターで，所与の正方行列であり，Y_* は第＊期の内生変数の変動量のベクトル表示（N 次元）である。また，Γ_t は区分的線形な関数の一次結合を示すものである。(D) は区分的線形な関数の exact な表現である。

(A)～(D) の問題は区分的線形な制約式をもつ２次計画法の問題であるが，この問題の特徴は以下のような諸点にある。

(i) システムは大規模なものである。いいかえれば，Y_* の次元が非常に大きく，また，計画期間 T も十分大きく取ることが望ましい。たとえば，わが国の新経済社会70年計画のための中期多部門第一次改定モデルでは，257本の構造方程式と1100本の定義式からなるノンリニアーなシステムとなっている。この約1400本の方程式の半数以上（約900本）はノンリニアーなタイプの

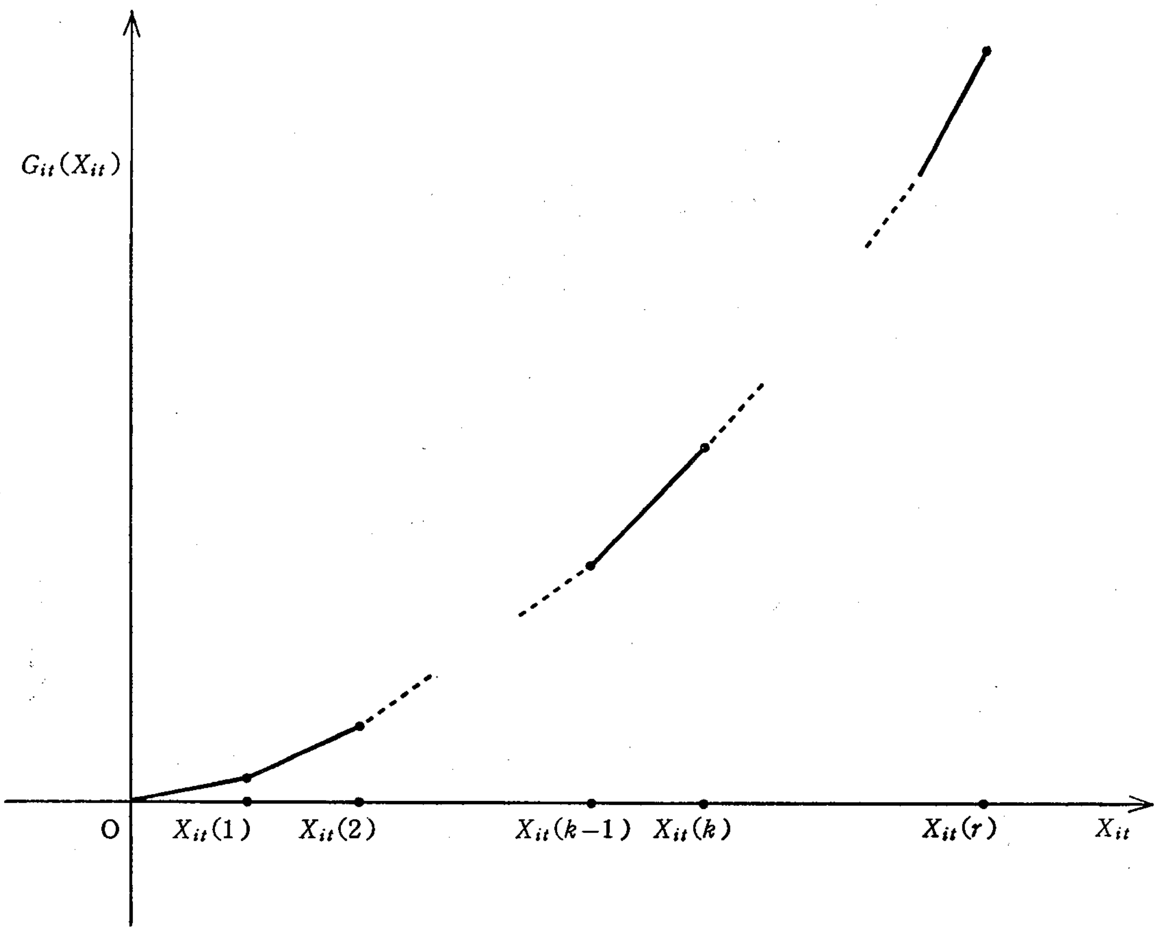

図 2-1

方程式である。[8)]

(ii) タイム・ラグをともなった系であること。

(iii) 主要な政策変数 (その変動を考察の対象とする) もなるべくたくさんとることが望ましい。

(iv) (B) の目標関数に表われる，評価対象となる内生変数 y_{jt} ($j=1, \cdots, n$) の個数 n は，一般には N，すなわちすべての内生変数の数に比較して非常に少ない。[9)]

以上のような特徴をもつ，区分的線形な制約式をもった2次計画法の問題

8) 〔16〕参照。

9) クラインは，目標変数の総数が25以上ともなると，取り扱い上の点や記憶装置の点で問題が出てくること，さらにポリシー・メーカーにとってもこのようにたくさんな変数のために，本質が理解しえなくなることを指摘している。Klein〔3〕, p. 278.

を，コンピュータを用いて解く方法について考えよう。

2-2　セパラブル・プログラミングによる近似解法

前の小セクションの問題（A)〜(D）は，理論上は，目標関数および制約式がセパラブル（separable）な関数であることに着目すれば，いわゆるセパラブル・プログラミングによる近似解法[10]を用いて近似的に極値解を求めることができる。しかしながら，この解法をコンピュータに持ちこもうとすると，問題のスケールの大きさが，禁止的といえるほどの，コンピュータの記憶容量を必要とさせることになる。たとえば，内生変数の変動を記述する系の方程式だけでも，$N=1000$，$T=10$ の場合には10000本を要し，また同じ個数の変数が必要となる。方程式数および変数の数はこれだけでは尽くされたことにはならない。

セパラブル・プログラミングでは，目標関数および区分的線形の制約式を適当な分点毎に折線近似（polygonal approximation）を行い，各分点間毎に1つの変数を導入する。[11] この分点の個数の大きさが近似の程度を決定する要因である。ところで，われわれのケースでは制約式に関していうならば，区分的線形な関数でそれらは exact に表現されているのであって，その分点は，政策変数の変動の刻み幅を以て表わされる。しかし，目標関数に関していうならば，評価対象となる内生変数の変動の偏差平方和を折線近似で行わなければならない。とくに偏差が大きくなれば，分点の数も大きくとらなければならなくなるであろう。さらに，これらの分点に対応する変数に関して，変数の上限を定める制約式が必要となるのである。

これらのことを考慮したとき，われわれの問題をこのままの形で，直ちにコンピュータでセパラブル・プログラミングの方法を用いて解こうとするのは実際的でないことがわかる。実際，あるコンピュータ・システムのもとで線形計画法の計算を行う場合，効率および *CPU* タイムなどを考慮にいれると，実用的に解ける問題の大きさは，最大式数4000式，変数10000程度であ

10) Hadley〔2〕および〔M1〕参照。
11) Hadley〔2〕, pp. 104-107, pp. 116-119.

るという。[12] そこで，次のセクションでは，われわれの問題の特徴を考慮した解法について述べよう。

2-3 コンピュータで解ける程度の実用的な解法

われわれの方針は，まず制約式の数と変数の数を減ずることにある。そのために，計画問題 (A)～(D) の特徴である (ii)と (iv) (82ページ参照) とに注目しよう。設定 (C)，すなわち，

(C) $A_t Y_t + \cdots\cdots + A_{t-S} Y_{t-S} + \Gamma_t = 0 \quad t=1, \cdots\cdots, T$

において，行列 A_t が正則であるとして，(C) は，

(C′) $Y_t + A_t^{-1}(A_{t-1} \cdot Y_{t-1} + \cdots\cdots + \mathrm{A}_{t-s} \cdot Y_{t-s} + \Gamma_t) = 0$

すなわち，

$$Y_t + \hat{B}_{t-1} \cdot Y_{t-1} + \cdots\cdots + \hat{B}_{t-s} \cdot Y_{t-s} + \hat{B}_t \cdot \Gamma_t = 0$$

where

$$\hat{B}_{t-i} = A_t^{-1} \cdot A_{t-i} \qquad i=1, \cdots, s \qquad \hat{B}_t = A_t^{-1}$$

と書くことができる。一方目標関数は，

(B) $\sum_t \sum_j w_{jt} \cdot (Y_{jt} - Y_{jt}^*)^2 \to \mathrm{Min}\,!!$

であるから，われわれの計画問題で (C′) の表示中，本質的に必要な制約式は，Y_t のうちで (B) にかかわる n 個の $Y_{jt}(j=1, \cdots, n)$ についてのもののみであることがわかる。

しかも，システムの記述がすべての変数または関数に関してリニアーであるために，N 個の内生変数のうち評価対象となる内生変数以外の，残りの $(N-n)$ 個のそれらの変動については，これらをすべて，

（ア） n 個の内生変数の変動量（ラグ付きを含む)。

（イ） r 個の区分的線形関数（ラグ付きを含む)。

の一次結合で表現できる。したがって，これらの変数に関して，上記の(C′)に代入を行うことによって，これらの $(N-n)$ 個の内生変数に関しては，極値問題を解く際の変数として考慮しなくとも良いことがわかる。この事実

12) 〔M1〕，4頁。

は，われわれの区分的線形変動方程式系が，本質的には各関数のリニアーな結合で記述されていることにもとづくものである。また，N個の内生変数の変動量については，たとえば非負の条件などのような，符号に関する一切の制限を行っていないことにもよるのである。

次に，区分的線形な関数の表示（D）における G_{it}（X_{it}）および目標関数に表われる変数 y_{jt}（$j=1, \cdots, n$；$t=1, \cdots, T$）について，セパラブル・プログラミングのデルタ形式（$\delta-form$）による表現[13)]に書き改める。

さらに，目標関数（B）の各項（$Y_{jt}-Y_{jt}{}^{*})^2\cdot w_{jt}$ について折線近似を行う。このようにして，問題(A)～(D) は次のような形のセパラブル・プログラミングの問題となる。すなわち，

(A′) Find δ_{kit}, $\hat{\delta}_{k'jt}$

$$k=1, \cdots, p;\ i=1, \cdots, r;\ k'=1, \cdots, p';\ j=1, \cdots, n$$

such that

$$\text{(B}'\text{)}\quad \sum_t \sum_j \sum_{k'} (\Delta f_{k'jt})\hat{\delta}_{k'jt} \quad \to Min!!$$

subject to

$$\text{(C}'\text{)}\quad \sum_j \sum_{k'} [(\Delta h_{k'jt})\hat{\delta}_{k'jt}+\cdots+(\Delta h_{k'j,\ t-s})\hat{\delta}_{k'j,\ t-s}]+B_t\cdot\Gamma_t=0$$

$$t=1, \cdots, T$$

$$\Gamma_t=\sum_i \sum_k [(\Delta g_{kit})\delta_{kit}+\cdots+(\Delta g_{ki,\ t-s})\delta_{ki,\ t-s}]$$

where

$$\delta_{kit}=(X_{it}-X_{it}(k-1))/\Delta X_{ki}$$

$$\delta_{k'it}=(Y_{it}-Y_{it}(k'-1))/\Delta Y_{k'j}$$

if $X_i(k-1)\leqq X_{it}\leqq X_i(k)$

$$\Delta X_{ki}=X_i(k)-X_i(k-1)$$

$$Y_j(k'-1)\leqq Y_{jt}\leqq Y_j(k')$$

if $\Delta Y_{k'j}=Y_j(k')-Y_j(k'-1)$

and $X_{it}=\Sigma(\Delta X_{ki})\delta_{kit}$

---

13) Hadley〔2〕, pp. 116-119.

$$Y_{jt}=\sum_{k'}(\Delta Y_{k'j})\hat{\delta}_{k'jt}$$

such that if $\delta_{kit}>0$ then $\delta_{uit}=1 \quad u=1,\cdots,k-1$

$\hat{\delta}_{k'jt}>0$ then $\hat{\delta}_{vij}=1 \quad v=1,\cdots,k'-1$

となる。この問題のスケールについて考えよう。まず変数は,

(α) (A') の δ_{kit}　　$k=1,\cdots,p\,;\,t=1,\cdots,T$

(β) (B') の折線近似のデルタ形式による表現で用いられる変数 $\hat{\delta}_{kjt}$

$k=1,\cdots,p'\,;\,i=1,\cdots,r\,;\,j=1,\cdots,n\,;\,t=1,\cdots,T$

ここに p' は $(Y_{jt}-Y_{jt}{}^*)^2\cdot w_{jt}$ の折線近似における分点の数を示す。で,合計 $(pr+p'n)\cdot T$ である。

一方,制約式の数は,

(r) Y_{jt} に関する制約式。　$j=1,\cdots,n\,;\,t=1,\cdots,T$

(δ) 上記 (α) および (β) の変数(非負)の上限を規定する制約式。

であり,合計 $(n+pr+p'n)\cdot T$ である。例えば, $n=10$, $r=10$, $T=10$ として,分点の数 p および p' をいろいろと変えてみて,変数の数および制約式の数を計算した結果が次のように得られる。

	p	p'	p	p'	p	p'
	3	20	5	40	10	50
変数の数	2300		4500		6000	
制約式の数	2400		4600		6100	

このように,分点の数をかなり大きくとっても,この程度のスケールの問題であるならば十分に効率よく解くことができる。

3　区分的線形な制約式をもつ2次計画法の exact な解法

3-1　拡張された線形計画法による解法

われわれは前のセクションで,われわれの計画問題のローカルな近似解が,実用的に解きうるサイズのセパラブル・プログラミングの問題における解として求められることを見てきた。この方法において近似的に表現される関数

は，実は目標関数のみであり，制約式についてはそれらが exact な形で表現されていたのであった。目標関数は各期の目標変数について，その望ましいレベルからの偏差のウェイト付けされた二乗和であったことを考える場合，一体どの程度の近似度で目標変数の各構成要素を近似していくのか，別の言い方をすれば，どの程度の数の分点をどのように定めて目標関数の各構成要素を近似していくのかという問題が生ずる。この場合，初めは分点の数を小さくとり，粗い近似解をまず求めてから，次第により精密な近似解を得るといった方法が考えられる。とはいえ，こうしたやりかたはかなり煩わしいものであるといえよう。

さらに，制約式の取り扱いについても工夫の余地があるであろう。すなわち，制約式の大部分は変数の上限を定めるものであり，その構造は，線形計画法におけるいわゆる上限法[14]の利用を示唆するものである。ただ，上限法を用いた解法にはいろいろな制限があることに注意しておこう。例えば，制約式がすべて凸または凹関数である場合，目標関数を線形近似してセパラブル・プログラミングの問題を考えたとき，この問題の解は，δ 変数についての制約を全く考慮せずに通常の線形計画法により解いて得られる解と一致する。[15] この場合に当然のことながら上限法を利用することができる。しかしながら，われわれの計画問題において区分的線形な制約式は，いくつかの凸または凹関数に近い関数の線形結合であり，したがって厳密な意味での凸または凹関数ではありえない。

また，制約式が一般的な区分的線形である場合，やはり目標関数を線形近似して，上限法を用いながら効率良く解を求めるアルゴリズムも提案されている。[16] 上で述べたいずれの場合においても，目標関数は線形近似で表現されるのであるから，前述のような問題点は依然として残るのである。それ故，目標関数は2次式のままにして，かつ，上限法を利用した解法を考えなけれ

14) Lasdon〔6〕, pp. 319–324.
15) Hadley〔2〕, pp. 124–126.
16) van de Angelis〔10〕.

ばならない。このセクションでは，こうした解法を論ずることにしよう。

議論の本質をより明確にするため，われわれのシステムにはさしあたり，各変量に関してタイム・ラグが存在しないものとして議論を進めよう。そこで次の計画問題，

$$\sum_i w_i(Y_i-\hat{Y}_i)^2 \to \text{Min!!}$$

subject to

$$Y_i=\sum_i u_i g_i$$

ここに g_i は，次の式で表現される区分的線形な関数である。

$$g_i=\sum_j v_{ij}\delta_{ij},\ 0\leqq\delta_{ij}\leqq u_i$$

ただし，$\delta_{ir}>0$ が成り立つのは $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{ir-1}$ がその上限値，すなわち，u_i の値を取る場合に限る $(i=1, \cdots, n\,;\ j=1, \cdots, q)$。

を考える。いま，Y_i に g_i を代入したものを，

$$Y_i=\sum_j\sum_i d_{ij}\delta_{ij}$$

として，この問題におけるローカルな最適解に対する，Kuhn-Tucker の条件を調べると次のようになる。

(1) (a) $Y_i^*-\sum_j\sum_i d_{ij}\delta_{ij}^*=0$

(b) $u_i+\delta_{ij}^*-\alpha_{ij}=0$

(c) $\delta_{ij}^*\geqq 0,\ \alpha_{ij}\geqq 0$

(2) (d) $-2w_i(Y_i^*-\hat{Y}_i)+\lambda_i=0$

(e) $-d_{ij}\lambda_i-u_{ij}+s_{ij}=0$

(f) $-u_{ij}+t_{ij}=0$

(3) (g) $\lambda_i(Y_i^*-\sum_j\sum_i d_{ij}\delta_{ij}^*)=0$

(h) $u_{ij}\ (u_i-\delta_{ij}^*-\alpha_{ij})=0$

(i) $s_{ij}\delta_{ij}^*=0$

(j) $t_{ij}\alpha_{ij}=0$

ここに，δ_{ij} については，$\delta_{ir}>0$ が成り立つのは $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{ir-1}$ がその上限値，すなわち，u_i の値を取る場合に限るという制限がある。また，λ_i および u_{ij} については符号に関する制限はないが，s_{ij}, t_{ij} については非負

条件が付される。

上記の(1)は，解の実行可能性を示すものであり，α_{ij}は δ_{ij} の上限値に対するスラック変数である。また，(2)において λ_i, u_{ij} はそれぞれ(1)の(a)および(b)に対応するパラメータであり，s_{ij} と t_{ij} はそれぞれ $\delta_{ij}^* \geqq 0$ および $\alpha_{ij} \geqq 0$に対応するパラメーターである。

そこで，(1)および(2)から Y_i^*, λ_i および u_{ij} を消去することによって次の式が得られる。

(4) $2w_i d_{ij}(\sum_j \sum_i d_i \delta_{ij}^*) + t_{ij} - s_{ij} = r_{ij}$

ここに，$r_{ij} = 2w_i \hat{Y}_i$ である。

この(4)式は，Kuhn-Tucker の条件(1)，(2)をコンパクトに表現したものであり，この式を今後の考察の出発点とすることができる。というのは，この(4)式に盛り込まれていない条件は，(1)の(b)および(3)の(g)から(j)であるが，(3)の(g)を除けば，残りはすべて δ_{ij}^* が非負，かつ，上限値以下であるかどうかのチェックであり，また，(3)の(g)は(4)式で自動的に満たされていることに注意しよう。δ_{ij}^*が非負，かつ，上限値以下であることを満たしているか否かの照合は，

(5) $s_{ij} > 0 \rightarrow \delta_{ij}^* = 0$, $\delta_{ij}^* > 0 \rightarrow s_{ij} = 0$

(6) $t_{ij} > 0 \rightarrow \alpha_{ij} = 0$, $\alpha_{ij} > 0 \rightarrow t_{ij} = 0$

で行うことができる。それ故，われわれの問題に対しては，線形計画のシンプレックス法において，その出発点となるべき実現可能解を求める方法（いわゆる phase I における方法）を適用することができる。すなわち，新たに人為変数 ε_{ij}（非負）を導入して，次の拡張された線形計画法の問題，

(7) $\sum_j \sum_i \varepsilon_{ij} \rightarrow \text{Min!!}$

subject to

$-2w_i d_{ij}(\sum_j \sum_i d_i \delta_{ij}) - t_{ij} + s_{ij} + \varepsilon_{ij} = r_{ij}$

$0 \leqq \delta_{ij} \leqq u_i$, $\varepsilon_{ij} \geqq 0$

ただし，$\delta_{ij} > 0$ が成り立つのは $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{ir-1}$ がその上限値，すなわち，u_i の値を取る場合に限る（$i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, q$）。

を解けばよいことになる。その場合，上記の条件(5)，(6)については，δ_{ij} が基底変数となる場合には s_{ij} および t_{ij} は自動的に非基底変数となること，また，δ_{ij} が非基底変数となる場合，すなわち，その値が0もしくは上限値を取る場合には，s_{ij} または t_{ij} が基底変数となりうることに，それぞれ定めておくことによりこれらの条件が満たされることになる。

さて，以上の予備的考察を基にして，拡張された線形計画法の問題を上限法を用いて解く方法を考えよう。ここで少し線形計画法の上限法のアルゴリズムについてふれてみることにする。次のような線形計画の問題，

(8) $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \text{Min!!}$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i \qquad i=1, \cdots, m$$

$$x_j \geqq 0 \qquad j=1, \cdots, n$$

$$x_j \leqq u_j \qquad j=1, \cdots, n$$

を解く場合，基底変数 $x_1, \cdots, x_m$ に対する正準形が次のように表わされているとする。

(9)
$$\begin{array}{l}
x_1 \quad + \bar{a}_{1,\,m+1} x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{1k} x_k + \bar{a}_{1,\,k+1} x_{k+1} + \cdots + \bar{a}_{1n} x_n = \bar{b}_1 \\
\quad x_2 \quad + \bar{a}_{2,\,m+1} x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{2k} x_k + \bar{a}_{2,\,k+1} x_{k+1} + \cdots + \bar{a}_{2n} x_n = \bar{b}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad x_m + \bar{a}_{m,\,m+1} x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{mk} x_k + \bar{a}_{m,\,k+1} x_{k+1} + \cdots + \bar{a}_{mn} x_n = \bar{b}_m \\
\qquad -z \quad + \bar{c}_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \bar{c}_k x_k + \bar{c}_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \bar{c}_n x_n = -\bar{z}
\end{array}$$

ただし，ここで非基底変数 $x_{m+1}, \cdots, x_k$ にはその上限値が与えられ，残りの非基底変数 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ は0として与えられているものとする。このとき，基底変数 $x_1, \cdots, x_m$ の値は必ずして $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m$ に等しいとは限らず，次の式で与えられる。

(10)
$$\begin{aligned}
x_i &= \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{k} \bar{a}_{ij} x_j \\
&= \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{k} \bar{a}_{ij} u_j
\end{aligned}$$

それ故，もし

$$0 \leqq \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{k} \bar{a}_{ij} u_j \leqq u_i$$

ならば，基底変数 $x_1, \cdots, x_m$ は線形計画の問題(8)の実現可能解となり，目標関数の値は，

$$(11)\quad z = \bar{z} + \sum_{j=m+1}^{k} \bar{c}_j x_j$$

で与えられる。そこで，(9)の正準形において実現可能解 $x_1, \cdots, x_n$ が，

$$(12)\quad \begin{array}{ll} 0 \leqq x_i = \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{k} \bar{a}_{ij} u_j \leqq u_i & i=1, \cdots, m \\ x_{m+p} = u_{m+p} & p=1, \cdots, k-m \\ x_{k+q} = 0 & q=1, \cdots, n-k \end{array}$$

であるものとしよう。上限法における解の最適性の判定基準は，

$$(13)\quad \begin{array}{ll} \bar{c}_{m+p} \leqq 0 & p=1, \cdots, k-m \\ \bar{c}_{k+q} \geqq 0 & q=1, \cdots, n-k \end{array}$$

である。つまり，上限値を取る変数 $x_{m+1}, \cdots, x_k$ に対する相対費用係数 $\bar{c}_{m+1}, \cdots, \bar{c}_k$ が非正で，下限値（零）を取る変数 $x_{k+1}, \cdots, x_n$ に対する相対費用係数 $\bar{c}_{k+1}, \cdots, \bar{c}_n$ が非負であればよい。もし，最適性の条件(13)が満たされていなければ，条件を満たしていない相対費用係数に対する変数を変化させることによって，目標関数 z の値を減少させることができる。その場合，どの変数を変化の対象とするかを決定するのに際しては，通常のシンプレックス法の基準を適用することになる。すなわち，

$$(14)\quad \bar{c}_s = \min(-\bar{c}_{m+1}, \cdots, -\bar{c}_k, \bar{c}_{k+1}, \cdots, \bar{c}_n)$$

となる s を求めてこれに対する x_s を基底変数に入れる。この(14)により基底に入る変数 x_s が決定されると，次にいままでの基底変数 $x_1, \cdots, x_m$ から非基底変数となるものを決めなければならない。その決め方の手順を次に述べよう。

まず，新たに基底変数となる x_s は基底に入る以前の値が下限値か上限値であることに注意する。そこで，$x_s=0$ の場合と $x_s=u_s$ の場合とに分けて考える。

(case−1) $x_s=0$ の場合。

この場合，基底変数 $x_1, \ldots, x_m$ は x_s を用いて表現すると，

$$x_i=\bar{b}_i-\sum_{j=m+1}^{k}\bar{a}_{ij}u_j-\bar{a}_{is}x_s$$
$$=\beta_i-\bar{a}_{is}x_s$$
$$(\beta_i=\bar{b}_i-\sum_{j=m+1}^{k}\bar{a}_{ij}u_j)$$

となる。いま,

$$\max\ x_s=\min\left(\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1s}},\ \frac{u_{r2}-\beta_{r2}}{|\bar{a}_{r2s}|},\ u_s\right)$$

としよう。ここに β_{r1} および β_{r2} はそれぞれ,

$$\min_{\bar{a}_{is}>0}\frac{\beta_i}{\bar{a}_{is}}=\frac{\beta_{r1}}{\bar{a}_{r1s}}$$

$$\min_{\bar{a}_{is}<0}=\frac{u_i-\beta_i}{|\bar{a}_{is}|}=\frac{u_{r2}-\beta_{r2}}{|\bar{a}_{r2s}|}$$

において最小値を与える i を示している。そこで次の操作を行なう。

(a) $\max\ x_s=\beta_{r1}/\bar{a}_{r1s}$ の場合は, x_{r1} の代わりに x_s が基底に入り, 非基底変数となる x_{r1} の値は0となる。

(b) $\max\ x_s=(u_{r2}-\beta_{r1})/|\bar{a}_{r2s}|$ の場合は, x_{r2} の代わりに x_s が基底に入り, 非基底変数となる x_{r2} の値は u_{r2} となる。

(c) $\max\ x_s=u_s$ の場合は, 単に x_s の値を u_s に変更するだけで基底の変化は起こらない。

(case−2) $x_s=u_s$ の場合。

この場合, 基底変数 $x_1, \cdots, x_m$ は x_s を用いて表現すると,

$$x_i=\bar{b}_i-\sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq s}}^{k}\bar{a}_{ij}u_j-\bar{a}_{is}x_s$$
$$=\beta_i'-\bar{a}_{is}x_s$$
$$(\beta_i'=\bar{b}_i-\sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq s}}^{k}\bar{a}_{ij}u_i)$$

となる。いま,

$$\min\ x_s=\max\left(\frac{\beta_{r3}'-u_{r3}}{\bar{a}_{r3s}},\ \frac{-\beta_{r4}'}{|\bar{a}_{r4s}|},\ 0\right)$$

としよう。ここに β_{r3}' および β_{r4}' は,

$$\max_{\bar{a}_{is}>0}\frac{\beta_i'-u_i}{\bar{a}_{is}}=\frac{\beta_{r3}'-u_{r3}}{\bar{a}_{r3s}}$$

$$\max_{\bar{a}_{is}<0} \frac{-\beta_{r4}}{|\bar{a}_{is}|} = \frac{-\beta_{r4}'}{|\bar{a}_{r4s}|}$$

において最大値を与える i を示している。そこで次の操作を行う。

(a) $\min x_s = (\beta_{rs}' - u_{rs})/\bar{a}_{r3s}$ の場合は，x_{r3} の代わりに x_s が基底に入り，非基底変数となる x_{r3} の値は u_{r3} となる。

(b) $\min x_s = -\beta_{r4}'/|\bar{a}_{r4s}|$ の場合は，x_{r2} の代わりに x_s が基底に入り，非基底変数となる x_{r4} の値は0となる。

(c) $\min x_s = 0$ の場合は，単に x_s の値を0に変更するだけで基底の変化は起こらない。

通常の線形計画法の問題は，上記の最適性の判定基準およびイタレーション毎の基底変数と非基底変数との決定方法とによって解くことができる。しかし，われわれの計画問題を解くに際して，上に述べたアルゴリズムを適用する場合には若干の修正が必要となる。というのは，われわれの計画問題は，

(ア) 目標関数は，本来0となるべき人為変数（ε_{ij}）の単純和で表わされていること。

(イ) 変数の一部である δ 変数に関しては制限が課せられている。すなわち，δ 変数に関しては $\delta_{ir}>0$ が成り立つのは $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{ir-1}$ がその上限値 u_i の値を取る場合に限る（$i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, q$）という条件が課せられていること。

などの点で通常の線形計画法の問題と異なっている。したがって，これらの点を考慮に入れた解法が求められなければならない。

まず(ア)の点について。最適性の判定基準である上記の(13)の条件，いいかえればイタレーションの終了条件は，われわれの場合，目標関数の値が0になっているか否かという条件に代えることができる。このことは，われわれの計画問題(7)において，目標関数の値を0ならしめる最適解が少なくとも一つは存在するという事実によって正当化される。[17]

17) 区分的線形な関数は分点間では直線で表わされるから，変数の定義域をある分点間に限定したとすれば，われわれの設定した目標関数をもつ計画問題において，一意的な

次に(イ)の点について。シンプレックス法において各イタレーションでは，新たに基底に入るべき変数を定めると同時に，いままで基底変数であったものの中から一つを選んでそれを非基底変数にする操作が必要となる。われわれの場合，もしもあるイタレーションで目標関数の値が0になっていない場合には，目標関数の値をさらに減少させるために，上述の操作を行わなければならない。まず，新たに基底に入るべき変数を定める方法から述べよう。基底に入るべき変数を決定する判定条件(14)は，δ 変数に関する制限を考慮して，次のように修正されなければならない。いま，あるイタレーションにおいて，i 番目の δ 変数に注目した場合，δ_{i1}，$\delta_{i2}, \cdots$，δ_{ir-1} がその上限値 u_i を取っていたとし，$\delta_{ir+k}=0(k\geqq1)$ であるとしよう。このとき変数 δ_{ir} の状態としては次の二通りのケースが考えられる。

(1) δ_{ir} が基底変数であるとき（この場合，$\delta_{ir}\neq0$, $\delta_{ir}\neq u_i$, $s_i=t_i=0$ である)。

(2) δ_{ir} が下限値0を取るとき（この場合，$t_i=0$ である)。

基底に入るべき変数を決定する操作を行う際には，さしあたりケース(1)は考えなくとも良い。従って，(2)のケースが問題となる。この場合，やはりまた二通りの可能性がある。すなわち，

(a) 変数 δ_{ir} が基底に入る。

(b) 変数 δ_{ir-1} が基底に入る。

それ故 i 番目の δ 変数に限っていえば，判定条件の対象となる相対費用係数は c_{ir-1} および c_{ir} のただ二つとなる。このことから，判定条件(14)は，次のように修正される。

(14)′ $c_s=\min(-c_{ir1-1}, c_{ir1}, \cdots, -c_{iri-1}, c_{iri}, \cdots, -c_{nrn-1}, c_{nrn})$

ここに，c_{iri-1} および c_{iri} はそれぞれ変数 δ_{ir-1} および変数 δ_{ir} に対する相対費用係数である。このようにして，基底に入るべき変数 δ_s が決定される。

最適解が存在することになる。いいかえれば，われわれの計画問題には一般に多くの解が存在するのであり，このように多くの解の中からローカルな最適解を求めるための方法を考えているのである。

次に，それまで基底変数であったものを基底から出す操作が必要である。まず，基底に入るべき変数 δ_s に関しては，次の三通りの可能性がある。

(a) $u_s > \delta_s > 0$（u_s は変数 δ_s の上限値を示す)。

(b) $\delta_s = u_s$（変数 δ_s は，イタレーションの開始時には0の値を取っていた場合)。

(c) $\delta_s = 0$（変数 δ_s は，イタレーションの開始時には u_s の値を取っていた場合)。

このうち，ケース(b)およびケース(c)では変数 δ_s は基底変数とはならずに，それまで上限値または下限値を取っていたものを，下限値または上限値にそれぞれ変更する。また，変数 δ_s は対応する変数 t_s および変数 s_s に対しては，$\delta_s s_s = 0$ および $(u_s - \delta_s)t_s = 0$ でなければならないから，t_s と s_s とが基底変数と非基底変数として，それぞれ入れ替わることになる。そして次のステップ，すなわち判定条件(14)′から変数 δ_s に対応する相対費用係数を除いてできる相対費用係数列に対しての判定条件に基き，新たな基底変数の決定のステップに入る。上のケース(a)のみに対して，変数 δ_s は新たに基底変数となり，このとき変数 δ_s に対応する変数 t_s および変数 s_s が自動的に非基底変数となる。

さて，上限法において基底から出る変数を定める手順において，上記の (case-1) の(c)が成立するとき（すなわち，$x_s = 0$ の場合に $x_s = u_s$ として基底の変化をさせないとき）および (case-2) の(c)が成立するとき（すなわち，$x_s = u_s$ の場合に $x_s = 0$ として基底の変化をさせないとき）が，われわれのケース(b)およびケース(c)に相当する。この場合の処理の方法については，すでに述べたとおりである。それ以外の場合に，上記の手順において基底から出されるべき変数を一般に x_r と書いたとき，$x_r = t_r$ または $x_r = s_r$ となる場合には，t_r または s_r が非基底変数となりうるのである。そうでないときには，$\delta_s \neq 0$，$\delta_s \neq u_s$ と $t_s = s_s = 0$ とは両立しない。したがって，この場合には費用係数列に対しての判定条件に基き，新たな基底変数の決定のステップに入ることになる。

次の小セクションでは簡単な例について，上に述べた方法を適用してみることとする。

3-2　計算例

次の問題を考える。

$$(X-5/2)^2+(Y+2)^2 \to \mathrm{Min}!!$$

subject to

$$X=\rho_{11}+2\rho_{12}+\sigma_{11}+2\sigma_{12}$$

$$Y=\rho_{11}+3\rho_{12}-\sigma_{11}-3\sigma_{12}$$

$$0 \leqq \rho_{11} \leqq 1,\quad 0 \leqq \rho_{12} \leqq 1$$

$$0 \leqq \sigma_{11} \leqq 1,\quad 0 \leqq \sigma_{12} \leqq 1$$

ただし，$\rho_{12}>0$，$\sigma_{12}>0$ が成立するのは，$\rho_{11}=1$，$\sigma_{11}=1$ の場合に限る。

この問題に対する Kuhn-Tucker の条件を書き下して整理し，さらに人為変数 ε を導入して，拡張された線形計画の問題をつくると次のようになる。

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4 \to \mathrm{Min}!!$$

subject to

$$2\rho_{11}+5\rho_{12}\qquad -\sigma_{12}+s_1-u_1+\varepsilon_1=1/2$$

$$-5\rho_{11}-7\rho_{12}+\sigma_{11}+5\sigma_{12}-s_2+u_2+\varepsilon_2=1$$

$$-\rho_{12}+2\sigma_{11}+5\sigma_{12}+t_1-v_1+\varepsilon_3=9/2$$

$$-\rho_{11}-5\rho_{12}+5\sigma_{11}+13\sigma_{12}+t_2-v_2+\varepsilon_4=11$$

$$0 \leqq \rho_{11} \leqq 1,\quad 0 \leqq \rho_{12} \leqq 1$$

$$0 \leqq \sigma_{11} \leqq 1,\quad 0 \leqq \sigma_{12} \leqq 1$$

$$0 \leqq \varepsilon_1,\quad 0 \leqq \varepsilon_2,\quad 0 \leqq \varepsilon_3,\quad 0 \leqq \varepsilon_4$$

$$\rho_{1j}\cdot u_j=0,\ (1-\rho_{1j})s_j=0 \qquad j=1,2$$

$$\sigma_{1j}\cdot v_j=0,\ (1-\sigma_{1j})t_j=0 \qquad j=1,2$$

ただし，$\rho_{12}>0$，$\sigma_{12}>0$ が成立するのは，$\rho_{11}=1$，$\sigma_{11}=1$ の場合に限る。

この拡張された線形計画の問題に対して上限法を用いると，次のシンプレックス・タブローが得られる。

簡単に以下の表について説明を行う。この表は，普通のシンプレックス・

表 3-1　拡張された線形計画問題のシンプレックス・タブロー

ステップ	基底	ρ_{11}	ρ_{12}	σ_{11}	σ_{12}	s_1	u_1	s_2	u_2	t_1	v_1	t_2	v_2	定数項	β_1, β_1'
0	ε_1	2	5		−1	1	−1							1/2	
	ε_2	−5	−7	1	5			−1	1					1	
	ε_3		−1	2	5					1	−1			9/2	
	ε_4	−1	−5	5	13							1	−1	11	
	$-z$	−6	−6	−6	−12	−1	1	1	−1	−1	1	−1	1	−17	
	上限														
1	ε_1	2	5		−1	1	−1							1/2	0.5
	ε_2	−5	−7	1	5			−1	1					1	0
	t_1		−1	2	5					1	−1			9/2	2.5
	ε_4	−1	−5	5	13							1	−1	11	6
	$-z$	4	7	−6	−17	−1	1	1	−1	0	0	−1	−1	−12.5	−6.5
	上限			1											
2	ρ_{11}	1	2.5	0	−.5	.5	−.5							1/4	0.25
	ε_2	0	5.5	1	2.5	2.5	−2.5	−1	1					9/4	1.25
	t_1	0	−1	2	5					1	−1			9/2	2.5
	ε_4	0	−2.5	5	12.5	.5	−0.5					1	−1	45/4	6.25
	$-z$	0	−3	−6	−15	−3	3	1	−1	0	0	−1	1	−13.5	−7.5
	上限			1											
3	ρ_{11}	1	2.4	0.2	0	.52	−.52							0.7	0.5
	ε_2	0	6	0	0	2.4	−2.4	−1	1					0	0
	t_1	0	0	0	0					1	−1			0	0
	σ_{12}	0	−0.2	0.4	1	0.04	−0.04					0.08	−0.08	0.9	0.5
	$-z$	0	0	0	0	−2.4	2.4	1	−1	0	0	0.2	−0.2	0	0
	上限			1											

タブローに，非基底変数が上限にあるか否かを記入する行および⒁式，⒂式の β_i，β_i' を記入する列を追加したものである。

まず，ステップ 0 では人為変数 ε_1，…，ε_4 が基底に入る。変数 ρ，σ の相対費用係数の列，

$$(-6, -6, -6, -12)$$

の中で，ρ_{11}，σ_{11} に対応するものは-6，-6 であり，$\sigma_{11}=1$ と増加させてもよいから t_1 を基底変数とし，ステップ 1 に入る。β_1' の列には，

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 9/2 \\ 11 \\ -12.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 6 \\ -6.5 \end{pmatrix}$$

が記入される。

相対費用係数の列，

$$(4, 7, -6)$$

で最小のものは，σ_{12} に対応する-6 であるが，β_i' の列の第 2 行目が 0 であり，しかも σ_{12} の対応する係数は 5 であることから，σ_{12} を増加させることはできない。そこで，ρ_{11} を増加させることにする。2 をピボット項としてピボット操作を行ない，ステップ 2 に入る。

相対費用係数の列，

$$(-3, -15)$$

で最小のものは，σ_{12} に対応する-15であるから，σ_{12} が基底変数に入る。12.5をピボット項としてピボット操作を行ない，ステップ 3 に入る。目標関数 z の値は 0 となり，最適解が求められたことになる。すなわち，

$\rho_{11}=0.5$

$\rho_{12}=0$

$\sigma_{11}=1$

$\sigma_{12}=0.5$

となる。このとき，$X=0.5+1+1=2.5$，$Y=0.5-1-1.5=-2$ となり，確かに $(X-5/2)^2+(Y+2)^2$ を最小にしている。

参考文献

〔1〕 Gass, S. I., *Linear Programming* (1958), McGraw-Hill, 1975（小山昭雄訳『線形計画法』好学社，1979)。
〔2〕 Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
〔3〕 Klein, L. R., "Managing the Modern Economy", in S. Holly et al. (eds.), *Optimal Control for Econometric Models*, Macmillan, 1979, pp. 265-285.
〔4〕 Künzi, H. P., H. G. Tzschach and C. A. Zehnder, *Numerical Methods of Mathematical Optimization*, Academic Press, 1971.
〔5〕 Land, A. H. and S. Powell, *FORTRAN Codes for Mathematical Programming*, Wiley, 1973.
〔6〕 Lasdon, L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, 1970（志水清孝訳『大規模システムの最適化理論』日刊工業，1973)。
〔7〕 Qayum, A., *Techniques of National Economic Planning*, Indiana Univ. Pr., 1975.
〔8〕 Theil, E., *Optimal Decision Rule for Government and Industry*, North-Holland, 1968.
〔9〕 ———, *Economic Forecast and Policy* (1961), North-Holland, 1970（岡本哲治訳『経済の政策と予測』創文社，1964)。
〔10〕 van de Angelis, "On the Solution of a Structured Linear Programming Problem in Upper Bounded Variables", in R. Fletcher (ed.), *Optimization*, Academic Press, 1969, pp. 65-83.
〔12〕 van de Panne, C., *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North-Holland, 1975.
〔13〕 古林　隆『線形計画法入門』産業図書，1980。
〔14〕 山本紀徳，高井孝之，「非線形計量モデルの摂動系に関する線形近似について(1)」桃山学院大学『総合研究所報』11(2)，1985，1-26頁。
〔15〕 経済審議会計量委員会編『計量委員会第４次報告』大蔵省印刷局，1973。
〔16〕 ———，『新経済社会七カ年計画のための多部門計量モデル』大蔵省印刷局，1980。
〔M1〕『FACOM OS IV MPS/X 解説書』70AR-0500-2，（株）富士通，1978。

付　　記

本稿は，本学の国内留学制度により，昭和60年３月１日より昭和61年２月28日まで，和歌山大学経済学部産業工学科飯尾要教授のご指導の下で行われた研修の成果の一部である。また，研修にあたっては財団法人私学研修福祉会からの助成を頂いた。

（やまもと・のりとく／経営学部教授／1986．10．27受理）